رياضيات ٤

نظرية الأعداد

سلم تصحيح مقرر نظرية الأعداد، الدورة الإضافية ٢٠١٥-٢٠١٦. د. ياسين الحوري

السؤال الأول (30)

1) من أجل $p=3$ يكون $p^2+2=11$ (5) عدداً أولياً.

ولكن إذا لم يكن p من الصيغة $3q$ فسيكون $p=3q+1$ أو $p=3q+2$:

(i): $p=3q+1 \Rightarrow p^2+2=(3q+1)^2+2=3\cdot(3q^2+2q+1)$

أي أنّ $3 \mid (p^2+2)$ (5) مما يعني أنّ (p^2+2) ليس عدداً أولياً.

(ii): $p=3q+2 \Rightarrow p^2+2=(3q+2)^2+2=3\cdot(3q^2+4q+2)$

أي أنّ $3 \mid (p^2+2)$ (5) مما يعني أنّ (p^2+2) ليس أولياً.

إذن العدد الأولي الوحيد الذي من أجله (p^2+2) أولي هو $p=3$.

2) إنّ أي عدد صحيح a له إحدى الحالات $3q$ أو $3q+1$ أو $3q+2$:

(i): $a=3q \Rightarrow a(2a^2+7)=3q\cdot(18q^2+7)$ (5) $\Rightarrow 3 \mid a(2a^2+7)$

(ii): $a=3q+1 \Rightarrow a(2a^2+7)=(3q+1)\left[2(3q+1)^2+7\right]=(3q+1)\cdot3\cdot(6q^2+$ [illegible]

أي أنّ $3 \mid a(2a^2+7)$ (5)

(iii): $a=3q+2 \Rightarrow a(2a^2+7)=(3q+2)\cdot\left[2(3q+2)^2+7\right]=(3q+2)\cdot3\cdot(6q^2+$ [illegible]

أي أنّ $3 \mid a(2a^2+7)$ (5)

إذاً في جميع الحالات يكون $3 \mid a(2a^2+7)$ لكل عدد صحيح a.

السؤال الثاني (25)

1) إنّ مرتبة العدد 2 مقاس 11 يجب أن تكون قاسمة لـ $\varphi(11)=10$،

وحيث إنّ قواسم 10 هي $\{1,2,5,10\}$ أي نوجد:

$(2)^2=4$; $(2)^5=32\equiv10 \pmod{11}$; $2^{10}\equiv1 \pmod{11}$

إذن: $ord_{11}(2)=10=\varphi(11)$ (5) ولذلك 2 جذر أولي للعدد 11.

2) نلاحظ أنّ

$2!=2$; $3!=6$; $4!=24$; $5!=5\cdot(4!)$, ...

وهكذا من أجل $n\geq4$ يكون $4!\equiv5!\equiv\dots\equiv n!\equiv0 \pmod{24}$ (5)

ومن ثم سنجد:

$$\sum_{1}^{1000} k! = 1!+2!+3!+4!+5!+\dots+1000! \equiv (1+2+6) \pmod{24}$$

إذن $\sum k! \equiv 9 \pmod{24}$ (5)

والباقي المطلوب هو 9

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث (20)

$x \equiv 2 \pmod 3$; $x \equiv 3 \pmod 5$; $x \equiv 2 \pmod 7$:

لدينا الأعداد 3,5,7 أولية نسبياً كلٌّ مثنى مثنى الثلاثة يوجد حل وحيد. نحسب الأعداد:

$M = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$; $M_1 = \frac{105}{3} = 35$; $M_2 = \frac{105}{5} = 21$; $M_3 = \frac{105}{7} = 15$

نحن الآن نحل المعادلات $M_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$; $i = 1,2,3$ أي نحل ثلاثة:

$35y_1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2y_1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow y_1 \equiv 2 \pmod 3$

$21y_2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow y_2 \equiv 1 \pmod 5$

$15y_3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow y_3 \equiv 1 \pmod 7$

ومنه نجد الحل المطلوب:

$x \equiv (c_1M_1y_1 + c_2M_2y_2 + c_3M_3y_3) \pmod M$

$x \equiv (2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1) \pmod{105} \Rightarrow$

$x \equiv (233) \pmod{105} \equiv 23 \pmod{105}$

إذاً العدد المطلوب هو 23

السؤال الرابع (25)

1) إذا كان $n = p^\alpha$ ، فإن القواسم الموجبة المختلفة للعدد p^α هي بالضبط:

$1, p, p^2, p^3, \dots, p^{\alpha-1}, p^\alpha$

وواضح أنه عددها هو $\alpha+1$ وبالتالي يكون

$\tau(p^\alpha) = \alpha + 1$.

2) إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ ولكون τ دالة ضربية نجد:

$\tau(n) = \tau(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \tau(p_1^{\alpha_1})\,\tau(p_2^{\alpha_2}) \cdots \tau(p_r^{\alpha_r})$

$= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdots (\alpha_r+1)$

إذا حل الطالب بأية طريقة أخرى صحيحة فتوزع الدرجات بما يتناسب مع هذا السلم.